Indukcia na počet krokov odvodenia v bezkontextovej gramatike

spísal Tomáš Farský, drobne upravil a spresnil Šimon Sádovský

1 Zadanie

Daná je gramatika $G = (N, \{a, b, c\}, P, \sigma)$, kde $N = \{\sigma, \alpha, \beta, \delta, \gamma\}$ a

$$\begin{aligned} P = \{\sigma &\rightarrow ba\alpha \mid c\alpha\delta c \\ \alpha &\rightarrow a \mid cbc \mid \alpha \mid \varepsilon \mid c\alpha \\ \beta &\rightarrow a\delta \mid \beta\beta \mid ac\beta \\ \delta &\rightarrow \delta a \mid \beta\gamma\sigma \mid a\delta \\ \gamma &\rightarrow \gamma a\gamma \mid ba\}. \end{aligned}$$

Dokážte, že ak sa vo vetnej forme generovanej gramatikou G vyskytne neterminál β, potom už nikdy neodvodíme terminálnu vetnú formu.

2 Riešenie

V prvom rade si uvedomíme, že dokazované tvrdenie je vyslovené neformálne a teda potrebujem poriadne formálne vysloviť tvrdenie, ktoré budem dokazovať. Všimneme si, že pravidlá „z β“ generujú vždy aspoň jeden z neterminálov β, δ. To isté platí o pravidách „z δ“. Teda neformálne povedané, ak dostanem vo vetnej forme neterminál β, tak sa ho nebudem vedieť nijak zbaviť a uviaznem so striedaním vetných foriem obsahujúcich aspoň jeden z neterminálov β, δ.

Teda budeme vedieť dokázať nasledovné tvrdenie:
Nech $u, v, w \in (N \cup T)^*$. Potom platí:

Ak $u\beta v \Rightarrow^* w$, tak existujú $w_1, w_2 \in (N \cup T)^*$ také, že $w = w_1\beta w_2$ alebo $w = w_1\delta w_2$.

Dokážeme tvrdenie **MI** vzhľadom na počet krokov odvodenia.

1° :

Nech $u, v, w \in (N \cup T)^*$ a nech $u\beta v \Rightarrow^0 w$. Potom zjavne $w = u\beta v$, teda slovo w má požadovaný tvar ($w_1 = u, w_2 = v$). ✓

2° :

Predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky odvodenia dĺžky najviac n. Tak chceme dokázať tvrdenie pre všetky odvodenia dĺžky $n + 1$.

Nech $u, v, w \in (N \cup T)^*$, nech $u\beta v \Rightarrow^{n+1} w$. Toto odvodenie môžem rozpísať ako:

$$u\beta v \Rightarrow^n \overline{w} \Rightarrow w, \text{ kde } \overline{w} \in (N \cup T)^*.$$

Z **IP** vyplýva, že ex. $\overline{w}_1, \overline{w}_2 \in (N \cup T)^*$ také, že $\overline{w} = \overline{w}_1\beta\overline{w}_2$ alebo $\overline{w} = \overline{w}_1\delta\overline{w}_2$.
Nech teda $\overline{w} = \overline{w}_1\beta\overline{w}_2$. Posledný krok odvodenia može vyerať nasledovne:

- $\overline{w}_1\beta\overline{w}_2 \Rightarrow \overline{w}_1 a\delta\overline{w}_2$ (použijeme pravidlo $\beta \rightarrow a\delta$). Teda $w = \overline{w}_1 a\delta\overline{w}_2$ má požadovaný tvar (pre hľadané w_1, w_2 platí $w_1 = \overline{w}_1 a, w_2 = \overline{w}_2$) ✓
- $\overline{w}_1\beta\overline{w}_2 \Rightarrow \overline{w}_1\beta\beta\overline{w}_2$ ($\beta \rightarrow \beta\beta, w_1 = \overline{w}_1\beta, w_2 = \overline{w}_2$) ✓
- $\overline{w}_1\beta\overline{w}_2 \Rightarrow \overline{w}_1 ac\beta\overline{w}_2$ ($\beta \rightarrow ac\beta, w_1 = \overline{w}_1 ac, w_2 = \overline{w}_2$) ✓
- Iné prípady nastať nemôžu

Nech $\overline{w} = \overline{w}_1 \delta \overline{w}_2$. Posledný krok odvodenia môže vyerať nasledovne:

- $\overline{w}_1 \delta \overline{w}_2 \Rightarrow \overline{w}_1 \delta a \overline{w}_2$ ($\delta \to a\delta a, w_1 = \overline{w}_1, w_2 = a\overline{w}_2$) ✓
- $\overline{w}_1 \delta \overline{w}_2 \Rightarrow \overline{w}_1 \beta\gamma\sigma \overline{w}_2$ ($\delta \to \beta\gamma\sigma, w_1 = \overline{w}_1, w_2 = \gamma\sigma\overline{w}_2$) ✓
- $\overline{w}_1 \delta \overline{w}_2 \Rightarrow \overline{w}_1 a\delta \overline{w}_2$ ($\delta \to a\delta, w_1 = \overline{w}_1 a, w_2 = \overline{w}_2$) ✓
- Iné prípady nastať nemôžu

Z dokázaného tvrdenia vyplýva, že ak vetná forma gramatiky G obsahuje neterminál β, tak každá vetná forma, ktorú z tejto vetnej formy odvodíme nutne obsahuje aspoň jeden z neterminálov β, δ a teda nie je za žiadnych okolností terminálna.

□

Otázka na zamyslenie pre fajnšmekrov: Na to aby sme dokázali tvrdenie so zadania sme dokázali tvrdenie, ktoré je o niečo špecifickejšie. Nedokazovali sme, že odvodená vetná forma bude iba neterminálna. My sme navyše presne dokázali, aké neterminály bude nutne obsahovať. Ak by sme chceli priamo dokazovať tvrdenie vyslovené v zadaní, tak v nejakom momente indukcie by sme narazali na problém a nevedeli by sme s ním pohnúť. V akom momente by to bolo a prečo?